Le groupe de Cremona est hopfien

Julie Déserti

LE GROUPE DE CREMONA EST HOPFIEN

JULIE DÉSERTI

ABSTRACT. On décrit les endomorphismes du groupe de CREMONA et on en déduit son caractère hopfien.

Une transformation rationnelle de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ dans lui-même s'écrit

$$(x:y:z) \mapsto (P_0(x,y,z):P_1(x,y,z):P_2(x,y,z))$$

où les P_i désignent des polynômes homogènes de même degré. Lorsqu'elle est inversible, on dit qu'elle est birationnelle ; par exemple l'involution de CREMONA $\sigma = (yz:xz:xy)$ est birationnelle. Le groupe des transformations birationnelles, noté $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$, est aussi appelé groupe de CREMONA.

Théorème 1 (Nœther, [1, 3])**.** *Le groupe de* CREMONA *est engendré par* $\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})$ *et l'involution* $\sigma = (yz:xz:xy)$.

Un automorphisme τ du corps $\mathbb{C}$ induit un isomorphisme $\tau(.)$ de $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$: à un élément f de $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ nous associons l'élément $\tau(f)$ obtenu en faisant agir τ sur les coefficients de f exprimé en coordonnées homogènes. *Tout automorphisme du groupe de* CREMONA *s'obtient à partir de l'action d'un automorphisme de corps et d'une conjugaison intérieure* ([4]).
Ici nous nous intéressons aux endomorphismes du groupe de CREMONA :

Théorème 2. *Soit* φ *un endomorphisme non trivial de* $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. *Il existe un plongement de corps* λ *de* $\mathbb{C}$ *dans lui-même et une transformation birationnelle* ψ *tels que pour tout* f *dans* $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ *on ait*

$$\varphi(f) = \lambda(\psi f \psi^{-1}).$$

En particulier φ *est injectif.*

Une conséquence directe est la suivante :

Corollaire 3. *Le groupe de* CREMONA *est hopfien, i.e. tout endomorphisme surjectif de* $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ *est un automorphisme.*

La preuve du Théorème 2 repose en partie sur le résultat suivant que nous appliquons à $\Gamma = \mathsf{SL}_3(\mathbb{Z})$:

Théorème 4 ([4])**.** *Soient* Γ *un sous-groupe d'indice fini de* $\mathsf{SL}_3(\mathbb{Z})$ *et* ρ *un morphisme injectif de* Γ *dans* $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. *Alors* ρ *coïncide, à conjugaison birationnelle près, avec le plongement canonique ou la contragrédiente, i.e. l'involution* $u \mapsto {}^t u^{-1}$.

On travaille dans une carte affine (x,y) de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Introduisons le groupe des translations :

$$\mathsf{T} = \{(x+\alpha, y+\beta) \mid \alpha,\ \beta \in \mathbb{C}\}.$$

Démonstration du Théorème 2. Puisque $\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})$ est simple, $\varphi_{|\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})}$ est ou bien triviale, ou bien injective.

1. Supposons $\varphi_{|\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})}$ triviale. Posons $h := (x, x-y, x-z)$; comme l'a remarqué Gizatullin ([5]), on a $(h\sigma)^3 = \mathrm{id}$. Ainsi $\varphi((h\sigma)^3) = \varphi(\sigma) = \mathrm{id}$, *i.e.* φ est trivial d'après le Théorème 1.

2. Si $\varphi_{|\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})}$ est injective, alors $\varphi_{|\mathsf{SL}_3(\mathbb{Z})}$ est, à conjugaison birationnelle près, le plongement canonique ou la contragrédiente.
2.a. Supposons que $\varphi_{|\mathsf{SL}_3(\mathbb{Z})} = \mathrm{id}$. Notons H le groupe des matrices 3×3 triangulaires supérieures unipotentes. Posons :

$$f_\beta(x,y) := \varphi(x+\beta, y),\quad g_\alpha(x,y) := \varphi(x+\alpha y, y)\quad \text{et}\quad h_\gamma(x,y) := \varphi(x, y+\gamma).$$

Les transformations birationnelles f_β et h_γ commutent à $(x+1,y)$ et $(x,y+1)$ donc

$$f_\beta = (x+\lambda(\beta), y+\zeta(\beta)) \qquad \text{et} \qquad h_\gamma = (x+\eta(\gamma), y+\mu(\gamma))$$

où $\eta,\ \zeta,\ \mu$ et λ sont des morphismes additifs de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$; puisque g_α commute à $(x+y,y)$ et $(x+1,y)$ il est de la forme $(x+A_\alpha(y), y)$. La relation

$$(x+\alpha y, y)(x, y+\gamma)(x+\alpha y, y)^{-1}(x, y+\gamma)^{-1} = (x+\alpha\gamma, y)$$

implique que, pour tous nombres complexes α et γ, nous avons $g_\alpha h_\gamma = f_{\alpha\gamma} h_\gamma g_\alpha$. Nous en déduisons que :

$$f_\beta = (x+\lambda(\beta), y), \qquad g_\alpha = (x+\Theta(\alpha)y+\varsigma(\alpha), y) \qquad \text{et} \qquad \Theta(\alpha)\mu(\gamma) = \lambda(\alpha\gamma).$$

En utilisant l'égalité

$$(x+\alpha)(x, \beta x+y)(x-\alpha, y)(x, y-\beta x) = (x, y-\alpha\beta)$$

on établit que $h_\gamma = (x, y+\mu(\gamma))$. Autrement dit

$$\varphi(x+\alpha, y+\beta) = (x+\lambda(\alpha), y+\mu(\beta)) \qquad \forall\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{C}.$$

Ainsi $\varphi(\mathsf{T}) \subset \mathsf{T}$ et $\varphi(\mathsf{H}) \subset \mathsf{H}$; puisque $\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})$ est engendré par H et $\mathsf{SL}_3(\mathbb{Z})$, l'image de $\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})$ par φ est contenue dans $\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})$. Le Théorème de classification de Borel et Tits ([2], Théorème A, p. 500) assure qu'à conjugaison intérieure près l'action de φ sur $\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})$ provient d'un plongement de corps de $\mathbb{C}$ dans lui-même.
2.b. Supposons que la restriction de φ à $\mathsf{SL}_3(\mathbb{Z})$ coïncide avec la contragrédiente. En étudiant les images de T et H par φ, on montre que $\varphi(\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})) \subset \mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})$. Toujours d'après [2] (Théorème A, p. 500) à conjugaison intérieure près, l'action de φ sur $\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})$ provient ici d'un plongement de corps de $\mathbb{C}$ dans lui-même composé avec la contragrédiente.

3. Supposons donc que l'action de φ sur $\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})$ coïncide avec celle d'un plongement de corps λ de $\mathbb{C}$ dans lui-même ou avec la composée d'une telle action et de la contragrédiente. Posons $(\tau_1, \tau_2) = \varphi(x, 1/y)$. À partir de

$$(x, 1/y)(\alpha x, \beta y)(x, 1/y) = (\alpha x, y/\beta)$$

on obtient

$$\tau_1(\lambda(\alpha^{-1})x, \lambda(\beta^{-1})y) = \lambda(\alpha^{-1})\tau_1(x,y) \quad \text{et} \quad \tau_2(\lambda(\alpha^{-1})x, \lambda(\beta^{-1})y) = \lambda(\beta)\tau_2(x,y)$$

ou

$$\tau_1(\lambda(\alpha)x, \lambda(\beta)y) = \lambda(\alpha)\tau_1(x,y) \quad \text{et} \quad \tau_2(\lambda(\alpha)x, \lambda(\beta)y) = \frac{\tau_2(x,y)}{\lambda(\beta)}$$

suivant que la contragrédiente intervient ou non. Par suite $\varphi(x, 1/y) = (\pm x, \pm 1/y)$. L'égalité $((y,x)(x,1/y))^2 = \sigma$ assure que $\varphi(\sigma) = \pm\sigma$. Notons $h := \left(\frac{x}{x-1}, \frac{x-y}{x-1}\right)$; la transformation $(h\sigma)^3$ est triviale (*voir* [5]) donc $(\varphi(h)\varphi(\sigma))^3$ doit aussi l'être. Puisque h appartient à $\mathsf{SL}_3(\mathbb{Z})$, on a $\varphi(h) = h$ ou $\varphi(h) = (-x-y-1, y)$ suivant que $\varphi_{|\mathsf{SL}_3(\mathbb{Z})}$ est l'identité ou la contragrédiente. Si $\varphi(h) = h$, alors $\varphi(\sigma) = \sigma$ et on conclut avec le Théorème 1. Lorsque $\varphi(h) = (-x-y-1, y)$, la seconde composante de $(\varphi(h)\varphi(\sigma))^3$ vaut $\pm 1/y$ ce qui est exclu. $\square$

Remerciements. Je remercie É. Ghys d'avoir posé le problème ainsi que pour les remarques et suggestions qu'il m'a faites. Merci à D. Cerveau pour nos discussions animées et fructueuses.

References

[1] M. Alberich-Carramiñana. *Geometry of the plane Cremona maps*, volume 1769 of *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[2] A. Borel & J. Tits. Homomorphismes « abstraits » de groupes algébriques simples. *Ann. of Math. (2)*, 97:499–571, 1973.

[3] G. Castelnuovo. Le trasformationi generatrici del gruppo cremoniano nel piano. *Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino*, 36:861–874, 1901.

[4] J. Déserti. Groupe de Cremona et dynamique complexe : une approche de la conjecture de Zimmer. *Int. Math. Res. Not.*, 2006, Art. ID 71701, 27 pp.

[5] M. Kh. Gizatullin. Defining relations for the Cremona group of the plane. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 46(5):909–970, 1134, 1982.

E-mail address: julie.deserti@univ-rennes1.fr